

Adrian Zanoschi
Gabriel Popa

Gheorghe Iurea
Petru Răducanu

Ioan Șerdean

Bacalaureat 2023

Matematică

M_mate-info

Teme recapitulative
65 de teste, după modelul M.E.
Breviar teoretic

Editura Paralela 45

Cuprins

Cuvânt-înainte	5
-----------------------------	---

TEME RECAPITULATIVE

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică	7.....234
1.2. Progresii	9.....234
1.3. Funcții. Funcția liniară	10.....236
1.4. Ecuația de gradul al II-lea. Funcția de gradul al II-lea	13.....236
1.5. Vectori	16.....238
1.6. Trigonometrie	19.....239
1.7. Aplicații ale trigonometriei în geometrie	21.....241

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi	24.....243
2.2. Numere complexe	26.....244
2.3. Funcții	28.....245
2.4. Ecuații și inecuații	31.....247
2.5. Combinatorică	34.....250
2.6. Matematici aplicate. Probabilități	36.....251
2.7. Geometrie analitică	38.....253
2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a.....	41.....254

Clasa a XI-a

3.1. Permutări.....	48.....256
3.2. Matrice	49.....256
3.3. Determinanți	52.....258
3.4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale	56.....259
3.5. Sisteme de ecuații liniare	58.....261
3.6. Probleme de sinteză – algebră.....	62.....263
3.7. Șiruri	67.....265
3.8. Șiruri date prin formule de recurență	72.....269
3.9. Limite de funcții.....	74.....271
3.10. Asimptote	78.....273
3.11. Funcții continue	80.....274
3.12. Derivata unei funcții.....	82.....276
3.13. Teorema lui Fermat. Teorema lui Rolle. Teorema lui Lagrange.....	85.....278
3.14. Regulile lui l'Hospital	88.....281
3.15. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor	90.....282
3.16. Reprezentarea grafică a funcțiilor	95.....289
3.17. Probleme de sinteză – analiză matematică	98.....295

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziție.....	104.....299
4.2. Grupuri.....	107.....301
4.3. Inele și corpuri	112.....306
4.4. Polinoame	115.....310
4.5. Probleme de sinteză – algebră.....	122.....315
4.6. Primitive.....	125.....316
4.7. Formula Leibniz–Newton	131.....319
4.8. Metode de integrare	135.....323
4.9. Proprietăți ale integralei Riemann.....	139.....327
4.10. Aplicații ale integralei definite.....	143.....332
4.11. Probleme de sinteză – analiză matematică	146.....334

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.....	150.....337
--	--------------------

BREVIAR TEORETIC	367
-------------------------------	------------

<i>Bibliografie</i>.....	396
---------------------------------	------------

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ și $B = (-2, 7)$. Determinați $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.
2. Ordonăți crescător numerele $a = 2,5(1)$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 2,(51)$ și $d = 2,51$.
3. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}} \right) \left(\sqrt{4\frac{2}{3}} \right)^{-1}$ este natural.
4. Arătați că numărul $b = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$ este natural.
5. Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor a și b .
6. Determinați numerele raționale a și b , știind că $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = a - b\sqrt{3}$.
7. Demonstrați că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.
8. Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
9. Stabiliți câte numere iraționale conține mulțimea $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{199}, \sqrt{200}\}$.
10. Calculați:
 - a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{5}{2}\right]$;
 - b) $\{1,64\} - \{-2,36\}$;
 - c) $[\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{2} + \sqrt{3}]$;
 - d) $\{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} - \{\sqrt{2} + \sqrt{3}\}$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

b) $|x - 1| + |2 - 2x| = 12;$

d) $|x^2 - 1| + |x + 1| = 0$.

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuațiile:

b) $|x + 3| \geq 4$.

13. Determinați numărul elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x + 1| \leq 100\}$.

14. Arătați că valoarea expresiei $E(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$ nu depinde de numărul real x .

15. Demonstrați că $|2x - 3| + 2|x - 1| \geq 1$, pentru orice număr real x .

16. Demonstrați că $x^2 + 3x + 3 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

17. Fie $E(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, unde $x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) $E(x) = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$:

b) $E(x) > \frac{3}{4}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

18. Demonstrați că, dacă $x, y \in [2, \infty)$, atunci $xy - 2x - 2y + 6 \in [2, \infty)$.

19. Demonstrați, prin inducție, că următoarele egalități sunt adevărate pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$;

b) $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$.

20. Demonstrați, prin inducție, că următoarele inegalități sunt adevărate pentru orice număr natural n care îndeplinește condiția indicată:

a) $2^n > 2n + 1, n \geq 3;$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, n \geq 1.$

21. Demonstrați că numărul $13^n + 7^n - 2$ se divide cu 6, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

22. Aflați câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 25.

23. Stabiliți câte numere naturale de patru cifre se pot forma utilizând cifrele 0, 1, 2, 3.

24. Stabiliți câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma utilizând cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

25. Aflați câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.

26. Aflați câte numere naturale de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 0.

27. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Aflați câte perechi $(a, b) \in A \times A$ au proprietatea că produsul $a \cdot b$ este impar.

- 28.** Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 199, 200\}$.
- Aflați câte dintre elementele mulțimii A se divid cu 6 și cu 8.
 - Aflați câte dintre elementele mulțimii A se divid cu 6, dar nu se divid cu 8.
 - Determinați câte dintre elementele mulțimii A se divid cu 6 sau cu 8.

1.2. Progresii

- Determinați primul termen al progresiei aritmetice $a_1, a_2, 13, 17, 21, \dots$.
- Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică de rație 2, în care $a_3 + a_4 = 8$. Determinați a_1 .
- Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$, astfel încât $a_3 = 5$ și $a_5 = 9$. Calculați suma primilor șapte termeni ai progresiei.
- Stabiliți dacă numărul 2007 aparține progresiei aritmetice 2, 7, 12, 17, $\dots$.
- Determinați numărul real x , știind că numerele 2, x și $x + 4$ sunt în progresie aritmetică.
- Calculați suma $1 + 4 + 7 + \dots + 31$.
- Determinați numărul natural n din egalitatea $1 + 5 + 9 + \dots + n = 231$.
- Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = 3n - 2$ este o progresie aritmetică. Determinați n , dacă $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 51$.
- Calculați suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 $a_4 - a_2 = 4$ și $a_1 + a_3 + a_5 + a_6 = 30$.
- Găsiți suma primilor 20 de termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, dacă:
 $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.
- Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir cu proprietatea că $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2 + 2n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este o progresie aritmetică.
- *Demonstrați că nu există nicio progresie aritmetică având ca termeni (nu neapărat consecutivi) numerele 1, $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$.
- *Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, \dots, 10\}$. Câte progresii aritmetice de trei elemente, cu rația pozitivă, se pot forma cu elementele lui M ?
- Determinați numărul real pozitiv x , știind că x , 6 și $x - 5$ sunt în progresie geometrică.
- Determinați primul termen al progresiei geometrice cu termeni pozitivi $b_1, 6, b_3, 24, \dots$.
- Știind că doi termeni ai unei progresii geometrice sunt $b_3 = 2$ și $b_5 = 4$, determinați b_7 .
- Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, cu termeni pozitivi, dacă $b_1 + b_2 = 3$ și $b_3 + b_4 = 12$.

- 18.** Determinați primul termen și rația unei progresii geometrice, dacă $a_1 + a_4 = \frac{7}{16}$,
iar $a_1 - a_2 + a_3 = \frac{7}{8}$.
- 19.** Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2008}}$. Demonstrați că $s \in (1, 2)$.
- 20.** Arătați că $2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^8) < 3^9$.
- 21.** Calculați $s = 1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \dots + 2^{100}$.
- 22.** Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = 6 \cdot 2^{n-2}$, $n \geq 1$ este o progresie geometrică. Determinați n dacă $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 93$.
- 23.** Fie $(b_n)_{n \geq 1}$ un șir cu proprietatea că $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 10^n - 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie geometrică.
- 24.** Determinați numerele reale a, b , dacă numerele $2, a, b$ sunt în progresie geometrică, iar numerele $2, 4, a$ sunt în progresie aritmetică.
- 25*** Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir pentru care $x_0 = 1$, iar $2x_{n+1} = x_n + 2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
a) Arătați că șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = x_n - x_{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, este o progresie geometrică.
b) Determinați formula termenului general al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

1.3. Funcții. Funcția liniară

- 1.** a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x - 1$. Calculați produsul $P = f(-9) \cdot f(-8) \cdot \dots \cdot f(8) \cdot f(9)$.
b) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 3$. Calculați suma $S = f(1) + f(2) + \dots + f(10)$.
c) Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x+1}{x}$. Calculați produsul $P = f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(100)$.
- 2.** Determinați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ cu proprietatea:
a) $f(1) = f(3)$; b) $f(1) \neq f(3)$; c) $f(1) = 2f(3)$.
- 3.** Determinați numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ astfel încât $f(1) \cdot f(2) = 0$.
- 4.** Determinați domeniul maxim de definiție al funcției $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, unde:
a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$; b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$; c) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$.

5. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x - 1}$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre graficul funcției f și axele de coordonate.
6. a) Arătați că funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ este impară.
b) Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + |x|$ este pară.
c) Determinați numărul funcțiilor impare $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$.
7. Demonstrați că 3 este o perioadă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left\{ \frac{x+1}{3} \right\}$ (unde $\{ \cdot \}$ reprezintă partea fracționară).
8. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + x^2$. Calculați $(f \circ f \circ f)(1)$.
9. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1$ și $g(x) = x^2 + 1$. Determinați funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$.
10. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ și $g(x) = x^2 - x$. Determinați numerele reale a și b , astfel încât $f \circ g = g \circ f$.
11. Fie funcțiile $f: (0, +\infty) \rightarrow (1, +\infty), f(x) = x^2 + 1$ și $g: (1, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), g(x) = \sqrt{x-1}$. Determinați funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$. Sunt egale funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$?
- 12*. Se consideră funcțiile: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x < 2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$, iar $g(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 2x-4, & x \geq 0 \end{cases}$. Determinați $f+g, f-g, f \cdot g$ și $f \circ g$.
13. a) Se consideră dreapta de ecuație $d: 2x + y - 1 = 0$. Determinați funcția care are ca grafic dreapta d .
b) Există o funcție al cărei grafic să fie dreapta $d': 2x + 1 = 0$? Dar pentru dreapta $d'': 2y + 1 = 0$?
14. Determinați funcția de gradul I al cărei grafic trece prin punctul $A(0, -2)$ și pentru care $f(1) = 2$.
15. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(a, 2)$ se află pe graficul funcției f .
16. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 6$. Determinați aria triunghiului format de graficul funcției f și axele sistemului de coordonate.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătați că:

a) $2\sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} - 5\sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$;

b) $\sqrt{3} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = 3$;

c) $\sqrt{6 + \sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{24}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

2. Se consideră numerele $a = \sqrt{3 - \sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{3 + \sqrt{3}}$. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \in \mathbb{Q}$.

3. Arătați că numărul $a = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

4. Calculați $\lceil \sqrt{2} - 3\sqrt{3} \rceil$ ($\lceil x \rceil$ reprezintă partea întreagă a lui x).

5. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$;

b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{18} : \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{2} - 1} \cdot \sqrt[4]{3 + 2\sqrt{2}}$;

d) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{9\sqrt{3}}$.

6. a) Aduceți la forma cea mai simplă: $E(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}} \right)^7$, unde $x, y \in (0, +\infty)$.

b) Arătați că numărul $a = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$ este rațional.

7. Se consideră $E(x) = x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$, unde $x \geq 0$. Calculați $E(a)$, unde $a = \sqrt[11]{8}$.

8. a) Fie $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$ și $b = \sqrt[16]{2}$. Arătați că $a \cdot b$ este număr rațional.

b) Arătați că numărul $a = \sqrt{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5} - 1} \cdot \sqrt[6]{7 - 3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$.

9. Determinați numărul natural k , dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^k = x$, pentru orice $x > 0$.

10. Ordonați crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ și $\sqrt[4]{5}$;

b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{27\sqrt{3}}$ și $\sqrt[3]{4}$.

11. Comparați numerele:

a) $a = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ și $b = \sqrt{3} + \sqrt{6}$; b) $a = \sqrt{13} - \sqrt{12}$ și $b = \sqrt{12} - \sqrt{11}$.

12. Comparați numerele $a = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ și $b = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$

13. Calculați:

a) $\log_2 8\sqrt{2}$; b) $\log_2 0,125$; c) $\log_{\sqrt{2}} 4\sqrt[3]{2}$; d) $\log_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$;
e) $4^{1 - \log_2 \sqrt{8}}$.

14. Ordonați crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_3 \frac{1}{27}$ și $c = \log_2 \frac{1}{32}$.

15. a) Arătați că numărul $a = \log_4 8 + \log_9 27 - \sqrt[3]{8}$ este natural.

b) Demonstrați că numărul $b = \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} + \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 4$ este întreg.

16. Calculați:

a) $\log_2 (6 + \sqrt{8}) + \log_2 (6 - \sqrt{8}) - \log_2 7$; b) $\lg 0,01 + 2^{\log_2 3} - 9^{\log_3 5}$;
c) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$; d) $\frac{\log_3 5 \cdot \log_7 11}{\log_7 5 \cdot \log_3 11}$.

17. Calculați:

a) $\log_2 8 \cdot \log_3 9 \cdot \log_5 \sqrt{5}$; b) $\log_2 8\sqrt{2} - \log_3 3\sqrt{3}$.

18. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\log_{\sqrt{3}} 9 + \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} 3$; b) $\frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8}$;
c) $\log_{11} 3 \cdot \log_7 5 - \log_7 3 \cdot \log_{11} 5$.

19. Arătați că numărul a este rațional, unde:

a) $a = \log_{25} 100 \cdot \log_{16} 25 - 2\log_{16} 5$; b) $a = \frac{\log_2 24}{\log_{96} 2} - \frac{\log_2 192}{\log_{12} 2}$;
c) $a = \log_2 9 + \frac{\log_2 12}{\log_3 2} - \frac{\log_2 6}{\log_{24} 2}$.

20. Arătați că numărul $a = \log_{\sqrt{3}} \frac{9}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{3}{5 + 2\sqrt{6}}$ este natural.

21. Care număr este mai mare?

a) $\log_3 5$ sau $\log_3 4$; b) $\log_2 3$ sau 2 ; c) $\log_{0,3} 2$ sau $\log_{0,3} 3$;
d) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ sau -1 ; e) $\log_3 5$ sau $\log_4 5$.

22. Demonstrați că:

- a) $0 < \log_3 2 < 1$; b) $1 < \log_3 4 < \frac{3}{2}$; c) $\log_3 4 < \log_4 9$.

23. a) Arătați că $\frac{3}{2} < \log_2 3 < 2$.

b)* Calculați partea întreagă a numărului $a = \log_2 3 + \log_3 2$.

24. Dacă $\log_3 2 = a$, calculați $\log_{12} 18$ în funcție de a .

25. Dacă $\log_{40} 100 = a$, calculați $\log_{20} 50$.

26. Știind că $\log_{12} 18 = a$, arătați că $\log_{24} 36 = \frac{2+2a}{5-a}$.

27. Știind că $\log_2 5 = a$, calculați $\log_5 \frac{5}{12} + \frac{1}{\log_3 5}$ în funcție de a .

28. Arătați că:

- a) $4^{\lg 5} = 5^{\lg 4}$; b) $\sqrt[4]{2^{\lg 3}} = (\sqrt{3})^{\lg \sqrt{2}}$.

29. a) Dacă notăm $\log_2 5 = \frac{a}{b}$, arătați că $2^a = 5^b$.

b) Demonstrați că $\log_2 5$ este număr irațional.

2.2. Numere complexe

1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - 2i$ și $z_2 = -4 + 3i$. Calculați $z_1 + z_2$; $3z_1 - 2z_2$.

2. Calculați: a) $i \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{10}$; b) $1 + i + i^2 + \dots + i^{10}$.

3. Calculați:

- a) $(1 - i)(1 + 2i) - 3(2 - i)$; b) $(2 + i)(3 - 2i) - (1 - 2i)(2 - i)$;

- c) $\frac{1+4i}{4+7i} + \frac{1-4i}{4-7i}$; d) $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i} \right)^2$;

- e) $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5} \right)^4$; f) $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^{24}$.

4. Demonstrați că:

- a) $\frac{25}{4+3i} + \frac{25}{4-3i} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{1+3i}{1-3i} + \frac{1-3i}{1+3i} \in \mathbb{R}$; c) $(1+i\sqrt{3})^3 \in \mathbb{Z}$;
- d) $(1+i\sqrt{3})^2 + (1-i\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Z}$; e) $(1-i)^{24} \in \mathbb{R}$.

5. Determinați:

a) partea imaginară a numărului $z = \frac{2+3i}{3-2i}$;

b) partea reală a numărului $z = \frac{2-i}{3i+4}$;

c) partea reală și partea imaginară ale numărului complex $z = \frac{5+8i}{8-5i}$;

d) partea imaginară a numărului complex $z = (1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.

6. a) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $z = 3(a-2i) - 2i(3a-i)$ este număr real.

b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că $z = \frac{2+i}{a(1+i)+i}$ este număr real.

7. a) Determinați $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $\frac{1+2x}{1-2i} + \frac{2+y}{1+2i} = i$.

b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât să avem egalitatea $(1-i\sqrt{3})^3 = a+ib$.

8. Determinați forma algebrică a numerelor complexe:

a) $z = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i} \right)^{103} + i^{102}$;

b) $z = 1 + \frac{1-i}{1+i} + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^9$.

9. Determinați conjugatul numărului $i^3 + 2$.

10. Fie z un număr complex. Arătați că $i(z - \bar{z})$ este număr real.

11. Se consideră numărul complex $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculați $z + \frac{1}{z}$.

b) Arătați că $z^2 = \bar{z}$.

12. Determinați $z \in \mathbb{C}$, dacă:

a) $z + 3i = 6\bar{z}$;

b) $2\bar{z} + z = 3 + 4i$;

c) $\frac{\bar{z} + 7i}{z} = 6$.

13. Determinați numerele complexe z care verifică egalitatea $z^2 = i\bar{z}$.

14. Calculați modulele numerelor complexe:

$z_1 = (3-4i)(1+i)$; $z_2 = \sqrt{2} - 1 + i(\sqrt{2}+1)$; $z_3 = \frac{8+i}{7-4i}$;

$z_4 = (\sqrt{2}-i)(\sqrt{3}+i)$; $z_5 = (2+3i)^2$; $z_6 = (2-i)^3 + (2+i)^3$.

15. Fie $z = a + 2i$, $a \in \mathbb{R}$. Calculați $|z|$, știind că $1 + i(z + \bar{z}) \in \mathbb{R}$.

16. Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

a) $z^2 = -9$; b) $z^2 - 2z + 2 = 0$; c) $z^2 - 8z + 25 = 0$; d) $z^2 = 2i$.

17. Fie z_1, z_2 soluțiile ecuației $2z^2 + z + 50 = 0$. Calculați $|z_1| + |z_2|$.

18. Rezolvați ecuația $x^2 - (a + i)x + 1 + i = 0$, $a \in \mathbb{R}$, știind că are o soluție reală.

19. Se consideră funcția $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = 3z - 4\bar{z}$.

a) Arătați că $f(a + bi) = -a + 7bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $(f \circ f)(z) = 25z - 24\bar{z}$.

c) Arătați că $f(z) = 0$ dacă și numai dacă $z = 0$.

20* Fie $z = 1 + i + i^2 + \dots + i^n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Dacă $n = 102$, calculați $|z|$.

b) Determinați n , astfel încât $z \in \mathbb{R}$.

21* Fie $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $(z + i)^{10} + (z - i)^{10} = 0$.

a) Arătați că $|z + i| = |z - i|$.

b) Demonstrați că $z \in \mathbb{R}$.

2.3. Funcții

1. Determinați domeniul maximal de definiție D al fiecăreia dintre funcțiile:

a) $f(x) = \sqrt{x(x-1)} + \sqrt{x(x+1)}$;

b) $f(x) = x + \log_2(2 - x - x^2)$;

c) $f(x) = \sqrt{x} + \lg \frac{x+1}{2-x}$;

d) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x-1}$.

2. a) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Calculați $(f \circ f)(512)$.

b) Fie $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$. Calculați $(f \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

c) Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2 x$. Calculați $(f \circ f)(256)$.

3. Calculați $S = f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde:

$$f(x) = \frac{\lg(1+x)}{x}, x \in (0, \infty).$$

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - 2x$. Demonstrați că funcția $f \circ f \circ f$ este strict descrescătoare.

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2 , τ^{-2} .
2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $(\sigma\tau)^{-1}$, σ^{-1} , τ^{-1} și arătați că $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1} \sigma^{-1}$.
3. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. Calculați σ^{2009} .
4. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in S_3$, știind că $\sigma x \tau = e$.
5. Se consideră următoarele permutări de gradul patru:
 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
 - a) Arătați că $\sigma^2 = \tau^2 = e$, $\sigma^{-1} = \sigma$, $\tau^{-1} = \tau$ și $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.
 - b) Determinați o permutare $\alpha \in S_4$, astfel încât $\alpha^{-1} \neq \alpha$.
6. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.
 - a) Calculați σ^3 .
 - b) Rezolvați ecuația $\sigma^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.
7. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.
 - a) Calculați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.
 - b) Rezolvați ecuația $\sigma x = \tau$.
8. Determinați semnul fiecăreia dintre următoarele permutări:
 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

9. Se consideră $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$.
- Determinați σ^{-1} .
 - Arătați că σ și σ^{-1} au același număr de inversiuni.
10. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & j & 9 \end{pmatrix} \in S_9$. Determinați i și j , astfel încât σ să fie o permutare pară.
11. Se dau permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$ și mulțimea $A = \{\sigma^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
- Determinați numărul elementelor mulțimii A .
 - Arătați că toate elementele mulțimii A sunt permutări pare.
12. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$.
- Determinați numărul inversiunilor permutării σ .
 - * Arătați că ecuația $x^4 = \sigma$ nu are nicio soluție în S_6 .

3.2. Matrice

1. Câte elemente are mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{Z}, |a_{ij}| \leq 2, i, j = \overline{1, 2} \right\}$?
2. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculați $A + B$, $2A - 3B$, $A + A'$.
3. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculați $A \cdot B$ și $B \cdot A$.
4. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ din $M_2(\mathbb{R})$. Calculați $a + b + c + d$, știind că $2X - AB = A$.
5. Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$, știind că $3 \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \\ z & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x+y & 1 \\ -1 & z \\ 2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -9 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Se consideră matricea $A_k = \begin{pmatrix} 2^k & 2k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Determinați matricea $B = A_1 + A_2 + \dots + A_n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

7. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Calculați suma elementelor matricei $A(x+1) - A(x)$.

b) Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că $5A(x) - (A(x))^2 = 4I_3$.

c) Demonstrați că $\sum_{k=1}^n A(k) = nA\left(\frac{n+1}{2}\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Arătați că $A(-2) + A(-1) + A(0) + A(1) + A(2) = 5I_3$.

b) Arătați că $A(1) \cdot A(2) = 5A(1)$.

c) Determinați numerele naturale x și y astfel încât suma elementelor matricei $A(x) \cdot A(y)$ să fie egală cu 27.

9. Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci numărul $\text{tr}(A) = a + d$ se numește urma matricei A .

a) Arătați că $\text{tr}(X+Y) = \text{tr}(X) + \text{tr}(Y)$, $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$ și $\text{tr}(\lambda X) = \lambda \text{tr}(X)$, oricare ar fi $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $\lambda \in \mathbb{C}$.

b)* Demonstrați că nu există $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $I_2 = XY - YX$.

10. Se consideră mulțimea $G = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$.

a) Arătați că, dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

b) Determinați două matrice $C, D \in G$ pentru care $CD \neq DC$.

c) Arătați că dacă $A \in G$, atunci $I_2 - A + A^2 \in G$.

11. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

verifică relația $AX = XA$, atunci există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

12. Determinați matricea $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2017}$.

13. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați A^{2017} .

14. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculați A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

15. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $B = A - I_3$.

a) Calculați B^2 și B^3 .

b) Calculați A^n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).

16. Calculați B^n ($n \in \mathbb{N}^*$), știind că $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

17* Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$. Calculați A^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

18* Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1+5a & 10a \\ -2a & 1-4a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$. Calculați A^n și B^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

19. Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 2a \\ -a & 1-a \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

a) Arătați că $X(a) \cdot X(b) = X((a+1)(b+1)-1)$.

b) Calculați $(X(a))^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Determinați $t \in \mathbb{N}$, știind că $X(1) \cdot X(2) \cdot \dots \cdot X(n) = X(t-1)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

20. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_3 + aA$, unde a este un număr real.

a) Calculați A^2 .

b) Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b .

c) Determinați matricea $M = X(-9) \cdot X(-8) \cdot \dots \cdot X(9) \cdot X(10)$.

21. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$.

a) Arătați că $B \in C(A)$.

b) Demonstrați că dacă $X \in C(A)$, atunci există $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

c)* Rezolvați ecuația $X + X^2 = A$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3.3. Determinanți

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați $\det(I_2 + A + A^2 + A^3)$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Rezolvați ecuația $\det(A - xI_2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că $\det(X \cdot X') = (ad - bc)^2$.

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\det(A) + \det(A^2) + \dots + \det(A^{2017})$.

c) Calculați $\det(A + A^2 + \dots + A^{2017})$.

5. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

a) Arătați că, dacă $A \in G$, astfel încât $\det A = 0$, atunci $A = O_2$.

b) Demonstrați că, dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

6. Calculați determinanții: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ și $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

7. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătați că:

$\det(A) = (a - b)(a - 1)$ și calculați $\det(A - A')$.

Soluții

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. 2. $b < d < a < c$. 3. $a = 6 \in \mathbb{N}$. 4. $b = 2 \in \mathbb{N}$. 5. $a = \sqrt{2}$, $b = 18\sqrt{2}$, $m_a = \frac{19\sqrt{2}}{2}$, $m_g = 6$. 6. $a = 8$, $b = -4$. 7. $\sqrt{x+49} \in [7, 10]$, $\sqrt{x+625} \in [25, 26] \Rightarrow a \in [32, 36]$, $\forall x \in [0, 51]$. 8. $E(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + 4} + \sqrt{(y+3)^2 + 1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. 9. 186. 10. a) -2; b) 0; c) 5; d) 1. 11. a) $x \in \{-3, 7\}$; b) $x \in \{-3, 5\}$; c) $x \in \{-1, 5\}$; d) $x = -1$. 12. a) $x \in [-1, 2]$; b) $x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$. 13. 100. 14. $E(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 15. $|2x-3| + 2|x-1| = |2x-3| + |2x-2| = |2x-3| + |2-2x| \geq |2x-3+2-2x| = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 16. $x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 17. b) $E(x) = (x^2 + 1) \left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right) > \frac{3}{4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 18. $xy - 2x - 2y + 6 = (x-2)(y-2) + 2 \in [2, +\infty)$, $\forall x, y \in [2, +\infty)$. 21. Fie $P(n) = 13^n + 7^n - 2 \div 6$, unde $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ avem $13^0 + 7^0 - 2 \div 6$, deci $P(0)$ este adevărată. Presupunem că $P(k)$ este adevărată pentru un număr natural k ; atunci $13^k + 7^k - 2 = 6p$, cu $p \in \mathbb{N}$. Rezultă că $13^{k+1} + 7^{k+1} - 2 = 13 \cdot 13^k + 7 \cdot 7^k - 2 = 13(6p + 2 - 7^k) + 7 \cdot 7^k - 2 = 6 \cdot 13p - 6 \cdot 7^k + 24 = 6(13p - 7^k + 4) \div 6$, deci $P(k+1)$ este adevărată. Drept urmare, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. 22. 6. 23. 192. 24. 60. 25. 243. 26. 171. 27. 16. 28. a) 8; b) 25; c) 50.

1.2. Progresii

1. $a_1 = 5$. 2. $a_1 = -1$. 3. Fie r rația progresiei; atunci $a_1 + 2r = 5$ și $a_1 + 4r = 9$. Rezultă $a_1 = 1$ și $r = 2$. Prin urmare, $S_7 = \frac{(a_1 + a_7) \cdot 7}{2} = 49$. 4. 2007 este al 402-lea termen al progresiei. 5. $x = 6$. 6. Este suma primilor 11 termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen 1 și rația 3; avem că $S_{11} = \frac{(1+31) \cdot 11}{2} = 176$. 7. Termenii sumei formează o progresie aritmetică în care $a_1 = 1$, $r = 4$. Dacă notăm cu m numărul de termeni, atunci $n = a_m = a_1 + r(m-1)$, deci $n = 4m - 3$. Astfel, $231 = S_m = \frac{m(4m-2)}{2} = 2m^2 - m$ și cum $m \in \mathbb{N}^*$, obținem că $m = 11$, apoi $n = 41$. 8. $a_{n+1} - a_n = 3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci (a_n) este progresie aritmetică de rație $r = 3$ și $a_1 = 1$. Apoi

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 51 \Rightarrow \frac{(3n-1)n}{2} = 51$, de unde $n = 6$. **9.** Vom avea $a_1 = 2$, $r = 2$, $S_{20} = 420$.

10. Observăm că $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = (a_1 + 5r) + (a_1 + 8r) + (a_1 + 11r) + (a_1 + 14r) = 4a_1 + 38r$, prin urmare $2a_1 + 19r = 10$. Atunci $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = 10(a_1 + a_1 + 19r) = 10 \cdot 10 = 100$.

11. Pentru $n \geq 2$ avem: $a_n = (a_1 + \dots + a_n) - (a_1 + \dots + a_{n-1}) = n^2 + 2n - (n-1)^2 - 2(n-1) = 2n + 1$. Cum $a_1 = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$, rezultă că $a_n = 2n + 1$, $\forall n \geq 1$. Atunci $a_{n+1} - a_n = 2$, $\forall n \geq 1$, aşadar $(a_n)_{n \geq 1}$ este progresie aritmetică de raţie 2. **12.** Presupunem, prin absurd, că există o progresie aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_p = 1$, $a_q = \sqrt{2}$ şi $a_s = \sqrt{3}$, cu $p, q, s \in \mathbb{N}^*$. Atunci $1 = a_1 + (p-1)r$, $\sqrt{2} = a_1 + (q-1)r$ şi $\sqrt{3} = a_1 + (s-1)r$, unde r este raţia progresiei ($r \neq 0$).

Deducem că $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{p-q}{q-s}$, contradicţie: numărul din stânga este iraţional, iar cel din

dreapta este raţional. **13.** Există 8 progresii de raţie 1, 6 progresii de raţie 2, 4 progresii de raţie 3 şi 2 progresii de raţie 4, în total 20 de progresii. **14.** $x = 9$. **15.** Din $b_3^2 = 6 \cdot 24$, obţinem că

$b_3 = 12$. Raţia progresiei va fi $q = \frac{b_3}{b_2} = 2$, deci $b_1 = \frac{b_2}{q} = 3$. **16.** Fie q raţia progresiei; atunci

$b_1 q^2 = 2$ şi $b_1 q^4 = 4$. Rezultă $q^2 = 2$ şi $b_1 = 1$. Prin urmare, $b_7 = b_1 q^6 = 8$. **17.** Fie $q > 0$ raţia progresiei. Rezultă $b_1 + b_1 q = 3$ şi $b_1 q^2 + b_1 q^3 = 12$. Deducem că $q = 2$. **18.** Dacă q este raţia progresiei, atunci $a_1(1 + q^3) = a_1(1 + q)(1 - q + q^2) = \frac{7}{16}$, iar $a_1(1 - q + q^2) = \frac{7}{8}$. Deducem că

$q = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$. **19.** $s = 2 - \frac{1}{2^{2008}} \in (1, 2)$. **20.** $2(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^8) = 2 \cdot \frac{3^9 - 1}{2} = 3^9 - 1 < 3^9$.

21. $s = \frac{2^{101} + 1}{3}$. **22.** Deoarece $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, (b_n) este progresie geometrică de raţie $q = 2$

şi $b_1 = 3$; $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 93 \Leftrightarrow 3(2^n - 1) = 93 \Leftrightarrow n = 5$. **23.** Analog soluţiei problemei 11, avem: $b_n = (10^n - 1) - (10^{n-1} - 1) = 9 \cdot 10^{n-1}$, $\forall n \geq 2$. Cum $b_1 = 10^1 - 1 = 9$, putem spune că

$b_n = 9 \cdot 10^{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Atunci $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{9 \cdot 10^n}{9 \cdot 10^{n-1}} = 10$, $\forall n \geq 1$, aşadar $(b_n)_{n \geq 1}$ este o progresie

geometrică de raţie 10. **24.** Din $a^2 = 2b$ şi $8 = 2 + a$ rezultă $a = 6$, $b = 18$. **25.** a) $\frac{b_{n+1}}{b_n} =$

$$= \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}x_n + 1\right) - \left(\frac{1}{2}x_{n-1} + 1\right)}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{2}, \forall n \geq 1, \text{ deci } (b_n)_{n \geq 1} \text{ este o progresie geometrică}$$

de raţie $\frac{1}{2}$; b) Cum $b_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, rezultă că $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2^n}$, $\forall n \geq 1$. Atunci $x_n = (x_n -$

$-x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + x_1 = b_n + b_{n-1} + \dots + b_2 + \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, iar această egalitate se verifică şi când $n = 0$.

1.3. Funcții. Funcția liniară

1. a) 0; b) 525; c) 101. 2. a) 216; b) $6^4 - 6^3 = 1080$; c) $3 \cdot 36 = 108$. 3. 15. 4. a) $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$; c) $[1, +\infty) \cup \{0\}$. 5. $A_1(-3, 0)$ și $A_2(-2, 0)$, respectiv $B(0, -6)$. 6. c) Din $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \{-1, 0, 1\}$, deducem că $f(0) = 0$. Există 3 funcții impare. 7. Din $\{a\} = a - [a]$, deducem că $f(x+3) = \left(\frac{x+1}{3} + 1\right) - \left[\frac{x+1}{3} + 1\right] = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. 8. 42. 9. $f \circ g, g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2$, $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 2$. 10. $(a, b) \in \{(0, 0); (0, 2); (1, 0)\}$. 11. $f \circ g: (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$, $(f \circ g)(x) = x$; $g \circ f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $(g \circ f)(x) = x$, deci $f \circ g \neq g \circ f$. 12. $f+g, f-g, f \cdot g, f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = \begin{cases} 1-2x, & x < 0 \\ -x-2, & 0 \leq x < 2 \\ 3x-5, & x \geq 2 \end{cases}$, $(f-g)(x) = \begin{cases} 3-4x, & x < 0 \\ 6-5x, & 0 \leq x < 2 \\ 3-x, & x \geq 2 \end{cases}$, $(fg)(x) = \begin{cases} (2-3x)(x-1), & x < 0 \\ (2-3x)(2x-4), & 0 \leq x < 2 \\ (x-1)(2x-4), & x \geq 2 \end{cases}$, $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2-3g(x), & g(x) < 2 \\ g(x)-1, & g(x) \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 5-3x, & x < 0 \\ 14-6x, & 0 \leq x < 3 \\ 2x-5, & x \geq 3 \end{cases}$. 13. a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 1$; b) Nu există; c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{2}$. 14. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - 2$. 15. $a \in \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$. 16. Intersecțiile graficului cu axele sunt $A(0, -6)$ și $B(3, 0)$, iar aria triunghiului OAB este 9. 17. $x = \frac{-2}{m^2+1} \notin (0, +\infty)$. 18. $A(0, a), B\left(-\frac{2}{a}, 0\right)$ și $AB = \sqrt{\frac{4}{a^2} + a^2} \geq \sqrt{4} = 2$, deci $AB \geq 2$. 19. $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$. 20. a) $\text{Im } f = \mathbb{R}$; b) $\text{Im } f = (-\infty, 4)$; c) $\text{Im } f = [-1, 7]$. 21. $\sqrt{2} - 5$. 22. $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. 23. $(f \circ g)(x) = -2x$, $f \circ g$ este strict descrescătoare. 24. Dacă $f(x) = ax + b$, atunci $(f \circ f)(x) = a^2x + ab + b$. Găsim $a = -3$ și $b = -\frac{1}{2}$. 25. a) $x = 2$; b) $x \in [2, 3]$. 26. a) $x \in (2, 6]$; b) $x \in (-1, 8]$; c) $x \in \left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$. 27. a) $x \in [1, 2]$; b) $x \in \left[-\frac{4}{3}, \frac{1}{5}\right]$.

1.4. Ecuația de gradul al II-lea. Funcția de gradul al II-lea

1. a) $S = \{0, 9\}$; b) $S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$; c) $S = \{-10, 1\}$; d) $\{-1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\}$. 2. a) $S = \{-1, 2\}$; b) $S = \{-1, 0\}$; c) $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$; d) $S = \{-1, 1\}$. 3. a) $S = [-2, 1]$; b) $S = [2, 3]$; c) $S = [-3, 0) \cup [3, +\infty)$. 4. $S = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$. 5. $S = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$. 6. $S = (0, 1)$. 7. a) $S = \left\{1, 2, \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\right\}$; b) $S = \{-1, 0, 2\}$. 8. a) $S = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$; b) $S = (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, +\infty)$.

1.4. Ecuația de gradul al II-lea. Funcția de gradul al II-lea

9. $S = \left[\frac{1}{7}, 1 \right] \cup [3, +\infty)$. 10. Se impune condiția $\Delta > 0$, de unde $a \in \left(-\infty, \frac{1}{8} \right) \cup (1, +\infty)$. 11. $\frac{3}{4}$.
12. a) $5x^2 - 2x = 0$; b) $x^2 - 2x - 1 = 0$. 13. Ecuația cu rădăcinile y_1, y_2 este $y^2 - (y_1 + y_2)y + y_1 \cdot y_2 = 0$, deci $2y^2 - 9y + 6 = 0$. 14. a) $\frac{25}{4}$; b) $-\frac{25}{8}$; c) $-\frac{99}{8}$; d) Folosind relația $2x_1^2 + 3x_1 - 4 = 0$ rezultă că $x_1^2 = 2 - \frac{3x_1}{2}$ și atunci $E = \frac{x_1 - 6}{3x_1} + \frac{x_2 - 6}{3x_2}$. Deducem că $E = -\frac{5}{6}$. 15. a) $S_1 = 3, S_2 = 17$; b) Avem $x_1^2 - 3x_1 - 4 = 0$ și $x_2^2 - 3x_2 - 4 = 0$, de unde deducem că $x_1^{n+2} - 3x_1^{n+1} - 4x_1^n = 0$ și $x_2^{n+2} - 3x_2^{n+1} - 4x_2^n = 0$ și, prin adunare, găsim relația $S_{n+2} - 3S_{n+1} - 4S_n = 0$; c) $S_5 = 1023$. 16. a) $-\frac{1}{4}$; b) 0; c) Ridicând la pătrat, avem $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 1$, deci, găsim $m = -\frac{1}{4}$. 17. a) $\Delta = 4(m^2 + m + 1) > 0, \forall m \in \mathbb{R}$, deci $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$; b) Se impune condiția $x_1 \cdot x_2 < 0$, de unde $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. c) Se impun condițiile $x_1 \cdot x_2 > 0$ și $x_1 + x_2 > 0$ care conduce la soluția $m \in \emptyset$. 18. Se impun condițiile $\Delta \leq 0$ și $m < 0$, de unde rezultă că $m = -\frac{1}{2}$. 19. $m \in \left[\frac{8}{3}, +\infty \right)$. 20. Deducem că $ax^2 + 2(a+1)x + a \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se impun condițiile $\Delta \leq 0$ și $a < 0$, deci $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right]$. 21. Deoarece $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deducem că $x^2 + 2x - 1 \geq a(x^2 + 1), \forall x \in \mathbb{R}$, deci $a \in (-\infty, -\sqrt{2}]$. 22. a) $S = \left\{ (-1, 1); \left(\frac{17}{13}, \frac{-7}{13} \right) \right\}$; b) $S = \{(0, -3); (1, -1)\}$; c) $S = \{(-1, 5); (-3, 19)\}$. 23. a) Dacă notăm $x + y = s$ și $x \cdot y = p$, atunci $s + p = 5$ și $s^2 - 2p = 5$, deci $(s, p) \in \{(3, 2); (-5, 10)\}$. Obținem $S = \{(1, 2); (2, 1)\}$; b) $S = \{(1, 2); (2, 1)\}$; c) $S = \left\{ \left(1, \frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{2}, 1 \right); \left(\frac{-3+\sqrt{33}}{12}, \frac{-3-\sqrt{33}}{12} \right); \left(\frac{-3-\sqrt{33}}{12}, \frac{-3+\sqrt{33}}{12} \right) \right\}$.
24. Înlocuind y cu $1 - x$ în a doua ecuație, obținem ecuația $2x^2 + (a - 4)x = 0$, care are soluție unică pentru $a = 4$. Soluția $S = \{(0, 1)\}$. 25. $f(x) = x^2 - x$. 26. $f(x) = x^2 - 2x + 3$. 27. $f(x) = x^2 - 2x - 3$ și $f(2) = -3$. 28. Cadrantul IV. 29. Avem $x_V = \frac{1-a}{a}, y_V = \frac{a-1}{a}$, deci $x_V = -y_V$.
30. Se impune condiția $f(a) = b, \forall m \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow m(a^2 + 2a + 1) - 2a + 3 - b = 0, \forall m \in \mathbb{R}^*$. Deducem că $a^2 + 2a + 1 = 0$ și $-2a + 3 - b = 0$, de unde $a = -1$ și $b = 5$. 31. $S = \{-2, 0\}$. 32. $a = 0$ și $b = 3$. 33. $a = -4$ și $b = 4$. 34. Abscisa punctului de intersecție dintre d și $\mathcal{P}$ verifică ecuația $ax^2 + (a - 1)x + 3 = -x + 2 \Leftrightarrow ax^2 + ax + 1 = 0$. a) $\Delta = 0$, de unde $a = 4$; b) $\Delta > 0$, deci $a \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$. 35. $a \in \left\{ -3, -\frac{7}{3} \right\}$. 36. $G_f \cap G_g = \{(0, 1); (2, 7)\}$. 37. $G_f \cap G_g = \{(-1, 0); (3, 12)\}$. 38. Deoarece f este strict descrescătoare pe $(2, +\infty)$ și cum $2 < 1 + \sqrt{2} < 1 + \sqrt{3} < 3$,

deducem că $f(3) < f(1+\sqrt{3}) < f(1+\sqrt{2})$. **39.** Folosim faptul că $f(x) \geq \frac{3}{4}, \forall x \in \mathbb{R}$.

40. a) $[-3, +\infty)$; b) $[-2, 22]$; c) $[-3, 6]$. **41.** $\text{Im } f = \left[\frac{2}{3}, 2 \right]$.

1.5. Vectori

1. a) $\overline{AB}$ și $\overline{CD}$; b) $\overline{AC}$ și $\overline{BD}$. **2.** $|\overline{MN} + \overline{NP} + \overline{PM}| = 0$. **3.** a) $|\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD}| = |2\overline{AC}| = 2\sqrt{2}$; b) $|\overline{AB} + \overline{BO}| = |\overline{AO}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $|\overline{OB} + \overline{OA}| = |\overline{DO} + \overline{OA}| = |\overline{DA}| = 1$; d) $|\overline{DC} - \overline{AO}| = |\overline{AB} + \overline{OA}| = |\overline{OB}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 5 = |\overline{AB} - \overline{AC}|$. **5.** a) Ambele sume sunt egale cu $\overline{AC}$; b) $2\overline{AM} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$; c) Ambele diferențe sunt egale cu $\overline{MC}$; d) $\overline{CA} + \overline{CB} = (\overline{CA} + \overline{AM}) + (\overline{CB} + \overline{BM}) = \overline{CM} + \overline{CM} = 2\overline{CM}$. **6.** a) Ținând seama de faptul că $ABDE$ și $ACDF$ sunt paralelograme, avem $(\overline{AB} + \overline{AE}) + (\overline{AC} + \overline{AF}) + \overline{AD} = 3\overline{AD} = 6\overline{AO}$; b) Patrulelul $ABCO$ este romb, deci $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AO} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$. **7.** Fie O punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului. Cum O este mijlocul diagonalelor AC și BD , avem $\overline{MA} + \overline{MC} = 2\overline{MO} = \overline{MB} + \overline{MD}$. **8.** Din $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}$ obținem că $2\overline{BM} = -\overline{CM}$. Avem $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$ și $\overline{AM} = \overline{AC} + \overline{CM}$. Deducem că $3\overline{AM} = 2\overline{AB} + \overline{AC}$, de unde rezultă cerința. **9.** a) $\overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{BD} = \frac{2}{3}(\overline{BA} + \overline{BC})$; b) $\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AB} + \frac{2}{3}(-\overline{AB} + \overline{AD}) = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}$. **10.** Vectorul $b \cdot \overline{AB}$ are lungimea egală cu bc , la fel ca vectorul $c \cdot \overline{AC}$. Punctul D este al patrulea vârf al paralelogramului $AB'DC'$, unde $\overline{AB'} = b \cdot \overline{AB}$, $\overline{AC'} = c \cdot \overline{AC}$. Cum $AB' = AC'$, paralelogramul $AB'DC'$ este romb, deci diagonala AD este bisectoarea unghiului $\angle BAC$. **11.** Din teorema lui Thales rezultă că $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 4$. Deducem $\frac{CN}{CA} = \frac{1}{5}$, deci $\overline{CN} = -\frac{1}{5}\overline{AC}$. **12.** Din $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = 2$, conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $DE \parallel BC$. **13.** MN este linie mijlocie în trapezul $ABCD$, deci $MN \parallel AB$. Apoi, NP este linie mijlocie în triunghiul ABC , așadar $NP \parallel AP$. Din axioma paralelelor urmează coliniaritatea punctelor M, N și P . **14.** Cum $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 3$, din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $MN \parallel BC$. Altfel: $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \frac{4}{3}(\overline{AN} - \overline{AM}) = \frac{4}{3}\overline{MN}$, deci $BC \parallel MN$. **15.** $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{3}(\overline{EA} + \overline{AD}) = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overline{AB} + \overline{AD}\right) = \frac{1}{3}\overline{AC}$. Rezultă că punctele A, C și F sunt